Mathematisches Institut der Universität München, WISE 2019/20

Übungen zur Mathe III für Physiker

Prof.Dr.P.Pickl

Blatt 4

Aufgabe 1:

Es sei

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y):=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Berechnen Sie zunächst die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$. Zeigen Sie nun durch Nachrechnen, dass die zweiten partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$ nicht vertauschen. Berechnen Sie hierzu also $\partial_y\partial_x f(0,0)$ und $\partial_x\partial_y f(0,0)$ und vergleichen die Ergebnisse. Was können Sie hiermit über die zweiten Ableitungen in Punkt $(0,0)$ schließen?

Aufgabe 2:

1. Gegeben sei
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=xy\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$
Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ total differenzierbar ist. Berechnen Sie nun die partiellen Ableitungen von f und untersuchen Sie diese in $(0,0)$ auf Stetigkeit.

2. Sei nun
$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
Zeigen Sie:
   (i) g ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.
   (ii) g ist in $(0,0)$ nicht total differenzierbar.
   (iii) g ist überall partiell differenzierbar, die partiellen Ableitungen sind jedoch nicht stetig in $(0,0)$.

Aufgabe 3: Die räumlichen elliptischen Koordinaten sind gegeben durch

$$\boldsymbol{v}:\mathbb{R}_+\times[0,2\pi)\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3,\quad \boldsymbol{v}(r,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}\sinh r\cos\varphi\sin\theta\\ \sinh r\sin\varphi\sin\theta\\ \cosh r\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi Matrix von $\boldsymbol{v}$.

Aufgabe 4: Sind die Folgende funktion Komplex Differentierbar?

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(x+iy)=x^2-y^2+2ixy$$
$$g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=\mid z\mid$$
$$r:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=e^{\bar{z}}$$

Beweisen Sie Ihre Antwort.